Д. С. Бисеров

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

denisbiserov07@yandex.ru

МАТРИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ V-КОМПОНЕНТНЫХ ФРАКТАЛОВ

Рассмотрим набор $\{X;\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\dots,\mathcal{F}_M\}$, где X — полное метрическое пространство, а $\mathcal{F}_i$, $i=\overline{1,M}$, — заданные на нем системы итерированных функций (СИФ), то есть следующие наборы $\{X;f_1^i,\dots,f_{L_i}^i\}$, где все f_j^i, $i=\overline{1,M}$, $j=\overline{1,L_i}$, являются сжатиями на X. Назовем этот набор суперсистемой итерированных функций (суперСИФ).

В работе [1] показано, как, комбинируя сжатия из различных СИФ $\mathcal{F}^i$, можно получать новые системы итерированных функций $\{f_a,\ a\in\mathcal{A}\}$, называемые V-компонентными системами итерированных функций, которые позволяют строить фрактальные множества, которые называются *V-компонентными фракталами*.

В [1] показано, что V-компонентные фракталы можно получать как образ кодовых деревьев при адресном отображении, ассоциированном с суперсистемой итерированных функций. Однако приведенный метод построения деревьев неудобен.

В настоящей работе рассмотрен метод построения кодовых деревьев, основанный на использовании матриц над пространством сжатий на X и произведения таких матриц.

Пусть C — множество отображений, действующих на $H(X)$. На этом множестве рассмотрим две бинарные операции $\cup : C\times C\to C$ и $\circ : C\times C\to C$, где под объединением f и g понимается следующее отображение (см. [4]) $(f\cup g) : A\in$ $\in H(X)\to f(A)\cup g(A)\in H(X)$, а композиция отображений понимается обычным образом. Также необходимо ввести нулевое отображение $0 : A \in H(X) \to \emptyset$.

Пусть $V \in \mathbf{N}$ и дан индекс $a \in \mathcal{A}$, определенный по Барнсли и состоящий из вектора m и матрицы V (см. [1]). Поставим в соответствие данному индексу квадратную матрицу M_a порядка V, построенную следующим образом. Рассмотрим m_1-ю СИФ, взятую из определения индекса a, которой соответствует набор функций $\{f_1^{m_1}, ..., f_{L_{m_1}}^{m_1}\}$. Тогда в первой строке матрицы будут стоять эти отображения, разбросанные по различным столбцам при помощи первой строчки матрицы V из определения индекса a по Барнсли и скомпонованные при помощи объединений двух или более отображений, или же, если в данный столбец не попадает ни одно отображение, то в данном столбце будет стоять нулевое отображение. Остальные строчки матрицы формируются подобным образом: выбирается СИФ, соответствующая следующему элементу вектора m, функции разносятся по столбцам в соответствии с матрицей V. Общий вид такой матрицы:

$$\begin{pmatrix} \bigcup\limits_{j\in N_{1,1}} f_j^{m_1} & \bigcup\limits_{j\in N_{1,2}} f_j^{m_1} & \cdots & \bigcup\limits_{j\in N_{1,V}} f_j^{m_1} \\ \bigcup\limits_{j\in N_{2,1}} f_j^{m_2} & \bigcup\limits_{j\in N_{2,2}} f_j^{m_2} & \cdots & \bigcup\limits_{j\in N_{2,V}} f_j^{m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bigcup\limits_{j\in N_{V,1}} f_j^{m_V} & \bigcup\limits_{j\in N_{V,2}} f_j^{m_V} & \cdots & \bigcup\limits_{j\in N_{V,V}} f_j^{m_V} \end{pmatrix},$$

где множества $N_{i,j} \subset \{1, ..., L_{m_i}\}$ определены, исходя из индекса a, то есть так, что $\bigcup\limits_{j=1}^{V} N_{i,j} = \{1, ..., L_{m_i}\}$ и $N_{i,j} \bigcap N_{i,j'} = \emptyset$.

Такую матрицу будем называть индексом. Множество всех индексов будем обозначать $\mathcal{A}$. Определим произведение двух таких матриц. Пусть даны две матрицы $M_a = (a_{i,j})$

и $M_b = (b_{i,j})$. Тогда произведением $C = M_a M_b$ называется матрица, элементы которой имеют вид $c_{i,j} = \bigcup\limits_{k=1}^{V} a_{i,k} \circ b_{k,j}$.

В работе показано, что конкатенации двух индексов $a_1 a_2$ по Барнсли соответствует матрица, полученная при помощи умножения двух матриц, соответствующих соответственно a_1 и a_2, то есть $M_{a_1} M_{a_2}$. Показано, что бесконечной последовательности индексов $a_1 a_2 \ldots$ соответствует бесконечное произведение матриц, соответствующих a_1, a_2 и т. д., то есть $\prod\limits_{i=1}^{\infty} M_{a_i}$.

Таким образом, показана корректность определения метода для построения V-компонентных фракталов. В докладе предоставлены примеры использования данного метода и даны образцы фрактальных множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barnsley M. *Superfractals.* – Boston: Academic Press, 2005.

2. Barnsley M., Hutchinson J., Stenflo O. *A fractal valued random iteration algorithm and fractal hierarchy* // Fractals, 2005. – V. 13.– No 2. – P. 111-146.

3. Barnsley M., Hutchinson J., Stenflo O. *V-variable fractals and superfractals.*

4. Кроновер Р. *Фракталы и хаос в динамических системах.* – М.: Наука, 2001.